RASTGELE DEĞİŞKENLERİN FONKSİYONLARI

X bir rastgele değişken ise X' in herhangi bir fonksiyonu da bir rastgele değişkendir. Bu bölümde, X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu bilindiğinde X'in herhangi bir fonksiyonunun olasılık (yoğunluk) fonksiyonu aşağıdaki yöntemler kullanılarak bulunabilir:

1. Değişken Değiştirme Tekniği
2. Dağılım Fonksiyonu Tekniği
3. Moment Çıkaran Fonksiyon Tekniği

1. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME TEKNİĞİ

X rastgele değişkeninin aldığı değerler kümesi reel sayıların sayılabilen bir alt kümesi ise X' e kesikli rastgele değişken, reel sayıların sayılamayan bir alt kümesi ise X' e sürekli rastgele değişken denir. Bir zarın atılması, bir markete gelen müşteri sayısı vb. örnekler kesikli rastgele değişken örnekleridir. Bir ampül bozuluncaya kadar geçen süre, bir kişinin boy uzunluğu vb. örnekler ise sürekli rastgele değişken örnekleridir.

Tek Değişken olması durumunda:

- Kesikli bir X rastgele değişkeni ile X' in bir fonksiyonu olan $Y = g(X)$ olarak tanımlanan rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu, X' in olasılık fonksiyonu ve $X=g^{-1}(Y)$ şeklindeki ters fonksiyonlardan yararlanılarak aşağıdaki genel ifade yardımıyla bulunur:

$$P(Y=y)=P(g(X)=y)=P(X=g^{-1}(y))$$

- Sürekli bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) olsun. g fonksiyonu artan yada azalan sürekli bir fonksiyon ve g^{-1} türevlenebilirse $Y = g(X)$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

şeklinde bulunur.

Çok Değişken olması durumunda:

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ herhangi rastgele değişkenler ve bunların ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olsun.

$$Y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$Y_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_n = g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

dönüşüm değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarına $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ ile gösterilirse, bu fonksiyon aşağıdaki algoritma ile bulunabilir:

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$>0 olduğu bölge A ile gösterilsin.

$$A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); -\infty < x_i < \infty, i = 1,2, \cdots, n\}$$

- Verilen dönüşümler A bölgesini bir tek B bölgesine dönüştürür. B bölgesinde $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$>0 olacaktır.

$B =$
$\{(y_1, y_2, \cdots, y_n);$ y_i'lerin tanım aralıkları dönüşümlerden yararlanılarak bulunur.$\}$

- Ters dönüşümler ve gerekiyorsa Jakobiyen hesaplanır. Verilen dönüşümlerden yararlanılarak ters dönüşümler bulunur.

$$x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$x_2 = w_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

Jakobiyen matrisi (sürekli olduğu durumda gereklidir)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

şeklinde bulunur.

- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ rastgele değişkenlerinin B bölgesinde tanımlı olan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \begin{cases} f(x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)) & , \; kesikli \\ f(x_1 = w_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, x_n = w_n(y_1, y_2, \cdots, y_n)). |J| & , \; sürekli \end{cases}$$

Örnek: X rastgele değişkeni olasılık fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1} & , \quad x=1,2,3,\cdots \\ 0 & , diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olan p parametreli Geometrik dağılıma sahip olsun. Y=X-1 rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

Çözüm: X rastgele değişkeninin tanım kümesinden Y=X-1 dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir.

$$D_X=\{1,2,3,\cdots\} \xrightarrow{Y=X-1} D_Y=\{0,1,2,\cdots\}$$

y=x-1 dönüşümü verildiğine göre ters dönüşümden x=y+1 elde edilir.
O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(Y=y)=\begin{cases} pq^{y}, & y=0,1,2,\cdots \\ 0 & , \quad diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeni olasılık fonksiyonu

$$P(X=x)=\begin{cases} \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} & , \quad x=0,1,2,3,4 \\ 0 & , diğer\ yerlerde \end{cases}$$

olan Binom(n=4, p=1/2) dağılımına sahip olsun.

a) Y= $\frac{1}{1+X}$ rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

b) $Y=(X-2)^2$ rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

a) P(X=x)>0 olduğu bölge için X rastgele değişkeninin tanım kümesinden Y= $\frac{1}{1+X}$ dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir. Yani verilen dönüşüm D_X bölgesini D_Y bölgesine dönüştürür. D_Y bölgesi için de P(Y=y)>0 olacaktır.

$$D_X=\{0,1,2,3,4\} \xrightarrow{Y=\frac{1}{1+X}} D_Y=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$$

y=$\frac{1}{1+x}$ dönüşümü verildiğine göre ters dönüşümden x=$\frac{1-y}{y}$ elde edilir.

O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(Y=y)=\begin{cases}\binom{4}{\frac{1-y}{y}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-y}{y}}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{1-y}{y}} & , \quad y=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\\ 0 & , diğer\ yerlerde\end{cases}$$

olarak elde edilir.

b) P(X=x)>0 olduğu bölge için X rastgele değişkeninin tanım kümesinden $Y=(X-2)^2$ dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir. Yani verilen dönüşüm D_X bölgesini D_Y bölgesine dönüştürür. D_Y bölgesi için de P(Y=y)>0 olacaktır.

$$D_X=\{0,1,2,3,4\} \xrightarrow{Y=(X-2)^2} D_Y=\{0,1,4\}$$

y=0 ise $P(Y=0)=P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{3}{8}$

y=1 ise $P(Y=1)=P(X=1)+P(X=3)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}+\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{8}$

y=4 ise $P(Y=4)=P(X=0)+P(X=4)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

O zaman Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

Y=y	0	1	4
P (Y=y)	3/8	4/8	1/8

olarak elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

X=x	-1	0	1
P (X=x)	1/3	1/2	1/6

şeklinde verilsin. Y = 3X+1 şeklinde tanımlanan Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm:

P(X=x)>0 olduğu bölge için X rastgele değişkeninin tanım kümesinden Y = 3X+1 dönüşümü ile Y rastgele değişkeninin tanım kümesi belirlenir. Yani verilen dönüşüm D_X bölgesini D_Y bölgesine dönüştürür. D_Y bölgesi için de P(Y=y)>0 olacaktır.

D_x ={x: x = −1, 0, 1} $\xrightarrow{y=3x+1}$ D_y = { y : y = −2, 1, 4 }

Y rastgele değişkeninin aldığı değerler ile olasılıklar

y = -2 ise P(Y=-2)=P(X=-1) =1/3

y = 1 ise P(Y=1)=P(X=0) =1/2

y = 4 ise P(Y=4)=P(X=1) =1/6

şeklinde hesaplanır. Böylece Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

Y=y	-2	1	4
P (Y=y)	1/3	1/2	1/6

şeklinde elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeni $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında sürekli düzgün dağılıma sahip olsun ve $X\sim$ U $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde gösterilsin. Y = tanX rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz?

X ~ U $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} & , \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \ \mathrm{d.d} \end{cases}$$

Ters dönüşüm yapıldığında;

y = tanx → x = arctany olur.

Sürekli düzgün dağılım olduğu için Jakobiyen aşağıdaki gibi bulunur.

$J = \frac{d_x}{d_y} = \frac{1}{1+y^2}$

Y rastgele değişkeninin sınırlarını elde edelim.

tan: R → $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

arctan: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$→ R $\qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} < arctany < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < arctany \qquad\qquad arctany < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{2}) < y \qquad\qquad y < \tan(\frac{\pi}{2})$$

$$-\infty < y \qquad\qquad y < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

g (y) = f(x = w(y)) . $|J|$

$$= \frac{1}{\pi} . \left|\frac{1}{1+y^2}\right|$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}.\frac{1}{1+y^2} & , -\infty < y < \infty \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: X rastgele değişkeni Standart Normal dağılıma sahip olsun. Y $= X^2$ rastgele değişkeninin dağılımını Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz?

X ~ N(0,1) ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} & , -\infty < x < \infty \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım kümesi aşağıdaki gibi belirlenir.

D_x = { x : -∞< x < ∞} $\xrightarrow{y=x^2}$ D_y = { y: y >0}

Ters dönüşüm

y $= x^2 \rightarrow$ x = w (y) =± $\sqrt{y}$

x = w_1(y) = - $\sqrt{y} \rightarrow J_1 = \frac{d_x}{d_y} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

x = w_2(y) = $\sqrt{y} \rightarrow J_2 = \frac{d_x}{d_y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

şeklinde elde edilir. Buna göre, Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = f(x=w_1(y)) \,.\, |J_1| + f(x=w_2(y)) \,.\, |J_2|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} . \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} . \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$= 2\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} . \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . y^{-\frac{1}{2}} . e^{-\frac{y}{2}} , & y > 0 \\ 0 , & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

- Bu sonuç göstermektedir ki X rastgele değişkeni standart normal dağılıma sahip ise $Y=X^2$ rastgele değişkeninin dağılımı 1 serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımıdır. $X \sim N(0,1)$ ise $Y = X^2 \sim \chi^2_{(1)}$ dir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.